Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Ingegneria – a.a. 2014/2015
Probabilità e statistica - Tutorato 5-6
Mario Tani

(1) Il calore (in calorie per grammo) emesso da un composto di cemento è normalmente distribuito di deviazione standard nota $\sigma = 2$. Si vuole testare

$$H_0 : \mu = 100$$

contro

$$H_1 : \mu \neq 100$$

con un campione di dimensione $n = 9$.

(a) Se la regione di accettazione fosse data da $98.5 \leq x \leq 101.5$, quale sarebbe l'errore di prima specie α?

(b) Determinare l'errore di seconda specie β e la potenza del test quando la vera media del calore è pari a 103.

(c) Determinare l'errore di seconda specie β quando la vera media del calore è pari a 105. Tra il β appena trovato e quello trovato nel punto precedente, quale dei due è più piccolo e perchè?

(2) Sia X una variabile casuale con distribuzione normale di media μ non nota e varianza pari a 1. Dalla suddetta popolazione viene estratto un campione casuale di ampiezza $n = 4$, ottenendo le seguenti realizzazioni campionarie: 10, 23, 34, 15.

(a) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza M e calcolarne il valore in corrispondenza della realizzazione campionaria osservata.

(b) Si consideri il seguente stimatore alternativo

$$T = \frac{4X_1 - X_3 + X_4}{4}.$$

E' non distorto? Tra i due stimatori proposti quale scegliereste e perché?

(3) L'etichetta delle bottiglie di champagne Veuve Coquelicot dichiara un contenuto di 730 ml. Un'associazione di consumatori decide di controllare questa affermazione e su 81 bottiglie esaminate riscontra una media campionaria $\bar{X} = 726$ ml. ed una varianza campionaria $S^2 = 625$. Supponendo che la quantità di champagne contenuta in ogni bottiglia si possa modellizzare con una v.a. normale, si può concludere (al livello di significatività $\alpha = 5\%$) che in media le bottiglie contengono meno di quanto dichiarato?

(4) Supponiamo che il numero di incidenti che avvengono ogni giorno su un tratto di autostrada si distribuisca come una variabile di Poisson di parametro $\lambda = 3$.

(a) Si calcoli la probabilità che 3 o più incidenti avvengano oggi.

(b) Si ripeta il precedente calcolo sapendo che almeno un incidente avverrà oggi.

(5) La quantità di zucchero contenuta in un succo di pesca è normalmente distribuita. Si vuole testare l'ipotesi

$$H_0 : \sigma^2 = 18$$

contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \sigma^2 \neq 18$

(a) Se da un campione di $n = 10$ succhi di pesca otteniamo una varianza campionaria $S^2 = 23.04$, possiamo accettare oppure no l'ipotesi nulla ad un livello $\alpha = 5\%$?

(b) Determinare l'intervallo di confidenza bilaterale al 98% per σ.

(c) Con l'aiuto del punto precedente, che cosa possiamo concludere circa l'ipotesi nulla ad un livello $\alpha = 2\%$?

(6) E' noto che il numero aleatorio N di errori presenti in un libro su un tratto di lunghezza r è una variabile di Poisson di parametro λr con $\lambda > 0$.
Supponendo che si sia incontrato un errore nel libro, qual è la densità della variabile X che rappresenta la lunghezza della porzione di testo da leggere prima del prossimo errore?

(7) Un laboratorio farmaceutico deve calcolare la concentrazione μ di principio attivo in un dato composto chimico. I risultati dell'analisi non sono certi, ma ripetuti possono mostrare che seguono una distribuzione normale. Dato un campione di ampiezza 3: 3.853; 3.588;

3.954 in g/l , determinare un intervallo di confidenza per la concentrazione μ di principio attivo al 90%.

(8) Per una industria di trafilati in alluminio è essenziale, per la qualità del prodotto, che la variabilità dello spessore sia molto bassa. Una nuova apparecchiatura promette una riduzione di tale variabilità; questa viene sperimentata tramite la produzione di un trafilato di spessore $\mu = 3$ mm. Dato il campione 2.88; 2.93; 2.98 in mm, sapendo che la distribuzione dello spessore è normale, determinare l'intervallo di confidenza per la varianza dello spessore del trafilato al 95%.

(9) Un segnale radio viene emesso con frequenza distribuita normalmente e con valore atteso μ e deviazione standard 30 kHz. Supponendo di osservare la seguente serie di frequenze in kHz:
610 601 578 615 640 630 618 602
613 610 625 585 622 608 597
determinare una stima di μ e la probabilità che la frequenza stia nell'intervallo di estremi 590 kHz e 610 kHz. Determinare poi un intervallo di confidenza per μ al 95%.

(10) Le marmitte catalitiche devono essere sottoposte ad un test per verificare se i livelli di certe sostanze tossiche siano entro limiti precisi. Un campione casuale di ampiezza 3 viene estratto dalla produzione settimanale di una ditta produttrice di marmitte catalitiche. Una prova su strada rileva che i valori per una particolare sostanza nociva prodotti da ciascuna marmitta catalitica sono 885, 889, 893, dove l'unita di misura è milligrammi al chilometro. Sapendo che l'emissione di tale sostanza tossica ha distribuzione normale, si determini un intervallo di confidenza per la varianza al 99%.

(11) Data la densità della variabile aleatoria X:

$$f(x) = \frac{c}{x^4} \qquad x \geq 1$$

determinare $E(X)$.

(12) Sono stati rilevati i prezzi di un prodotto in anni diversi. I dati sono i seguenti
A: 05 10 20 30 60
P: 30 50 120 150 200
(a) Stimare i parametri α, β e σ^2 di un modello di regressione e calcolare l'indice di determinazione R^2.
(b) Prevedere il prezzo del prodotto nell'anno 70.
(c) Si verifichi l'ipotesi nulla secondo cui $\beta = 0$ contro un'alternativa bilaterale ad un livello di significatività del 10%. Quanto vale il p-valore?

(13) Consideriamo un ufficio postale con due impiegati. Supponiamo che quando il sig. Rossi entra nell'ufficio egli veda il sig. Bruni e la Sig.ra Vianello agli sportelli. Supponiamo che il Sig. Rossi acceda al primo sportello che si libera. Se il tempo che un impiegato dedica a un cliente è distribuito esponenzialmente con parametro λ, qual è la probabilità che il sig.Rossi sia l'ultimo dei tre a lasciare il locale?

(14) Il prezzo al barile (in \$) del petrolio Brent sul mercato di Londra è così variato durante il mese di Marzo 1995:
5 marzo: 19,6 \$
7 marzo: 19,3 \$
8 marzo: 18,9 \$
12 marzo: 18,55 \$
15 marzo: 17,75 \$
18 marzo: 17,5 \$
(a) Interpolare l'andamento del prezzo in funzione del tempo, ponendo l'origine al 5 Marzo.
(b) Ipotizzando che il modello mantenga la sua validità nel tempo, individuare in quale giorno si avvererà la previsione del ministro Saudita Yamani: 'Il petrolio scenderà sotto i 15 \$'

(15) La densità congiunta di X e Y è data da:

$$f(x, y) = c(y^2 - x^2)e^{-y} \qquad -y \leq x \leq y; 0 < y < \infty$$

(a) Si trovi il valore di c.

(b) Si determinino le marginali di X e di Y.

(c) Si trovi $E[X]$.

(16) Supponiamo che la vita (in ore) di una lampadina da 75 watt sia approssimatamente normalmente distribuita ed abbia una deviazione standard pari a $\sigma = 25$ ore. Un campione di 20 lampadine ha una media (campionaria) di vita $x = 1014$ ore.

(a) E' ragionevole supporre che la media di vita delle lampadine superi 1000 ore? Usare un livello di significatività $\alpha = 5\%$.

(b) Calcolare il P - value del test precedente.